ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ, 2004, том 96, № 5, с. 751–759

ТРЕТИЙ СЕМИНАР ПАМЯТИ Д.Н. КЛЫШКО

УДК 535.14

ПЕРЕПУТЫВАЮЩИЕ КВАНТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

© 2004 г. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков

Физический факультет и Международный лазерный центр Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 17.07.2003 г.

Введено понятие перепутывающего измерения как наиболее общей формы идеального квантового измерения. Дано математическое определение перепутывающего измерения в форме супероператорного преобразования, проектирующего начальные состояния в системе объект–прибор на соответствующие перепутанные состояния, возникающие после завершения процесса измерения. Рассмотрены математические свойства супероператора перепутывающего измерения. На примере двухуровневой системы в аналитической форме исследован спектр его собственных состояний. Установлено алгебраическое соотношение $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_{AM}$ между супероператорами перепутывающего и стандартного измерения, проанализирована создаваемая в процессе измерения когерентная информация и обсуждены связанные с ней потенциальные возможности использования перепутывающего измерения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исторически понятие "квантового измерения" ассоциировалось первоначально со взаимодействием квантовой системы с относительно грубым прибором, который мог извлекать информацию только в классической (некогерентной) форме и соответственно его математическое представление связывалось с так называемым проективным измерением [1–3]. В последнее время, однако, в связи со значительным прогрессом в развитии экспериментальных средств физической реализации преобразований квантовой информации [4] прослеживается тенденция к существенно более общему пониманию квантового измерения, в котором учитываются существенно квантовый характер "измерительного прибора" и возможность кодирования измеренной информации в качественно неклассической форме – в форме квантовой перепутанности. Например, измерение рассматривается как эффективный инструмент реализации некоторых квантовых алгоритмов [5]. Кроме того, в последнее десятилетие объектом интенсивного исследования стала проблема создания перепутанности посредством квантового измерения (регистрации излученного фотона) [6–10]. В приложении к проблемам квантовой оптики используется также специфическое понятие когерентного измерения [11, 12]. Еще в [13] отмечено прямое соответствие между базовой для квантовых вычислений операцией C-not и невозмущающим измерением [14], представленным в форме квантовой перепутанности.

Таким образом, возникает вопрос, существуют ли два типа квантового измерения в соответствии с двумя качественно противоположными формами извлекаемой информации или существует единая операция, содержащая указанные два типа в качестве частных случаев? В данной работе дается ответ на этот вопрос: такой единой операцией является перепутывающее квантовое измерение, характеризуемое – в дополнение к параметрам стандартного (некогерентного) квантового измерения с классическим представлением выходной информации – так называемой матрицей перепутанности, определяющей степень "деквантованности" результатов измерения.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАНТОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ

На стадии становления квантовой теории физическое содержание понятия измерения было одной из наиболее дискуссионных проблем. Однако в том плане, в котором она формулировалась изначально, ее можно считать исчерпанной благодаря установлению физической реализуемости произвольного вполне положительного преобразования (супероператора) матрицы плотности $\hat{\rho} \longrightarrow \mathcal{S}\hat{\rho}$ [15, 16]. Супероператор $\mathcal{S}$ называется вполне положительным, если наряду с положительностью матрицы плотности $\mathcal{S}\hat{\rho}$ для всех положительных матриц плотности $\hat{\rho}$, заданных в гильбертовом пространстве H_A, положительность результата такого же преобразования, примененного в форме $\mathcal{S} \otimes \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ – единичный (тождественный) супероператор, гарантирована и для любых матриц плотности $\hat{\rho}_{AB}$, заданных в произвольном расширении исходного пространства $H_A \otimes H_B$. Физическая реализуемость понимается здесь абстрактно как возможность представления супероператора в форме $\mathcal{S}\hat{\rho} = \mathrm{Tr}_R U_{AR}^{-1}(t)(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_R)U_{AR}(t)$, описывающей $\mathcal{S}$ как динамическое (унитарное) преобразование в открытой системе с усреднением по состояниям резервуара, описываемым матрицей плотности $\hat{\rho}_R$. Соответственно вопрос о физическом содержании преобразования квантового измерения решается установлением вполне положительности соответствующего супероператора.

Преобразование квантового коллапса волновой функции $\psi = \sum c_n|n\rangle$ в смешанный ансамбль $\{|c_n|^2, |n\rangle\}$ [1, 2], описывающее результат выполнения измерения в пространстве состояний только объекта, представляется супероператором $\mathcal{S} = \sum \hat{P}_n \odot \hat{P}_n$, где $\hat{P}_n$ – операторы проектирования на собственные подпространства, отвечающие собственным значениям λ_n измеряемой переменной, оператор которой представляется спектральным разложением $\hat{A} = \sum \lambda_n \hat{P}_n$. Здесь символ $\odot$ обозначает место подстановки преобразуемого оператора – в частности, матрицы плотности: его использование позволяет построить очевидное символическое представление алгебры супероператоров в терминах операторов квантово-механических переменных [16], Применение супероператора квантового коллапса $\mathcal{S}$ к чистому состоянию $\hat{\rho} = \psi\psi^+$ дает состояние $\sum c_n|n\rangle\langle n|$, $c_n = \langle n|\psi\rangle$, которое может быть отображено смешанным ансамблем $\{|c_n|^2, |n\rangle\}$. При этом вполне положительность супероператора $\mathcal{S}$, гарантирующая его физическую реализуемость, очевидна.

Минимальное полноценное описание измерения связано, как минимум, с рассмотрением набора одновременно измеримых состояний объекта (A) и измерительного прибора (M) в моменты времени непосредственно до (i) и после (f) измерения. Очевидным выражением идеи идеально точного и невозмущающего измерения являются соотношения

$$\mathrm{A}_i \longrightarrow \mathrm{M}_f, \quad \mathrm{A}_f = \mathrm{A}_i. \tag{1}$$

Первое выражает факт отображения начальных состояний объекта соответствующими конечными состояниями измерительного прибора, а второе – неизменность измеряемых состояний объекта, т.е. невозмущающий характер измерения. Естественной формой представления соотношений такого рода в квантовой теории является отображение событий соответствующими операторами проектирования. Все обсуждаемые далее супероператоры измерения реализуют соотношения (1).

3. СТАНДАРТНОЕ КВАНТОВОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Минимальное динамическое описание стандартного квантового измерения, включающее объект и индикатор измерительного прибора, может не учитывать квантовый характер прибора и рассматривать его как заведомо классическую систему. Для этого совместное преобразование должно рассматриваться как смешанное – квантово-классическое. Оно описывается супероператорным преобразованием по состояниям квантового объекта и линейным преобразованием классического распределения вероятностей приборного индикатора $p(\mu) \longrightarrow p'(\lambda) = \sum_\mu p(\lambda|\mu)p(\mu)$. Физическое содержание общего соотношения (1) сводится к приобретению измеряемой физической величиной одного из возможных ее значений λ и совпадению с этим значением результирующего показания приборного индикатора, реализуемого классической индикаторной переменной M первоначально независимого классического прибора,

$$M = \lambda.$$

Супероператор преобразования идеального измерения в квантово-классической составной системе, образованной измеряемой квантовой системой и индикатором прибора, имеет вид [16]

$$\mathcal{M}(\lambda|\mu) = \hat{P}_\lambda^A \odot \hat{P}_\lambda^A. \tag{2}$$

Операторы $\hat{P}_\lambda^A$ описывают ортогональное проектирование на подпространства, отвечающие собственному значению λ измеряемой переменной

$$\hat{A} = \sum \lambda \hat{P}_\lambda^A.$$

Индекс λ нумерует конечные состояния индикатора, а отсутствие зависимости от μ соответствует независимости от начального состояния индикатора. Начальные состояния составной системы описываются совместными квантово-классическими распределениями $\hat{\rho}(\mu)$, заданными как линейные операторы, в прямом произведении $H_A \otimes \Lambda_M$ гильбертова пространства квантовой системы и множества классических значений индикаторной переменной Λ_M. Они удовлетворяют требованиям положительности $\hat{\rho}(\mu) \geq 0$ (т.е. для любых ψ и всех μ имеем $\langle\psi|\hat{\rho}(\mu)|\psi\rangle \geqq 0$) и нормировки $\sum_\mu \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}(\mu) = 1$ и преобразуются супероператором (2) по правилу

$$\hat{\rho}(\mu) \longrightarrow \hat{\rho}(\lambda) = \sum_\mu \mathcal{M}(\lambda|\mu)\hat{\rho}(\mu) = \sum_\mu \hat{P}_\lambda^A \hat{\rho}(\mu) \hat{P}_\lambda^A. \tag{3}$$

Здесь мы ограничиваемся рассмотрением только класса “прямых” измерений, описываемых ортогональными проекторами, имея в виду его основополагающий характер. Обобщение на случай измерений более общего вида может быть естественным образом построено в рамках общей идеологии открытых систем.

Наряду с максимально упрощенным описанием измерительной процедуры в форме супероператора (2), отображающего физическую структуру измерительного прибора лишь посредством изменяющейся классической переменной $\mu \longrightarrow \lambda$, более детальное описание должно включать, как минимум, и квантово-механические переменные прибора, дополнительные к индикаторной. В этом случае минимально детализированное расширение модели сводится к замене классического прибора квантовым с пространством состояний H_M с размерностью D, равной числу значений измеряемой переменной. В этой системе с вероятностью $P(k) = |c_k|^2$ происходит отображение

$$\sum_k c_k|k\rangle|m\rangle \longrightarrow |k\rangle|k\rangle \tag{4}$$

с полной потерей когерентности между начальными состояниями $|k\rangle$. Соответственно супероператор (2) заменяется полностью квантовым супероператором стандартного измерения

$$\mathcal{M}_{AM} = \sum_\lambda (\hat{P}_\lambda^M \mathrm{Tr}_M \odot) \otimes (\hat{P}_\lambda^A \odot \hat{P}_\lambda^A). \tag{5}$$

Здесь $\hat{P}_\lambda^A$, как и в (2), соответствуют проекторам на подпространства (не обязательно одномерные) с определенными значениями измеряемой переменной $\hat{A} = \sum \lambda \hat{P}_\lambda^A$, а $\hat{P}_\lambda^M$ – одномерные проекторы, соответствующие значениям λ индикаторной переменной $\hat{M} = \sum \lambda \hat{P}_\lambda^M$. Проектирование матрицы плотности измеряемой системы, описываемое в (5) операторами $\hat{P}_\lambda^A$, приводит к преобразованию ее состояния в некогерентную суперпозицию соответствующих состояний с точно определенными значениями λ переменной $\hat{A}$. Операция $\mathrm{Tr}_M\odot$ выражает независимость конечного состояния индикатора от начального, а проекторы $\hat{P}_\lambda^M$ описывают конечные квантовые состояния индикатора после измерения, соответствующие измеренным значениям λ. В общем случае проекторы $\hat{P}_\lambda^M$, если рассматривать их в реальном физическом пространстве измерительной системы, многомерны, что для макроскопических систем соответствует наличию многочисленных внутренних степеней свободы измерительной системы. Однако для описания главного содержания процесса измерения последние не имеют значения, когда они несущественны в процессе взаимодействия индикатора с измеряемой системой и потому идеальное измерение может быть адекватно описано в минимальном гильбертовом пространстве H_M.

Супероператор (5), будучи физически реализуемым, вполне положителен и в дополнение к этому эрмитов относительно скалярного произведения $(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = \mathrm{Tr}\hat{\rho}_1^+\hat{\rho}_2$. С учетом этого его специфическое свойство – идемпотентность, т.е. равенство

$$\mathcal{M}_{AM}^2 = \mathcal{M}_{AM},$$

идентифицирует его как супероператор ортогонального проектирования на подпространство невозмущаемых состояний в системе объект–индикатор, описываемых соответствующими матрицами плотности.

4. ПЕРЕПУТЫВАЮЩИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Изложенное последовательно полуклассическое понимание измерения не является самым общим [1, 17, 18]. В частности, в [19] введен супероператор преобразования в системе объект–прибор, который при специальном выборе параметров описывает отображение

$$\sum_k c_k|k\rangle|m\rangle \longrightarrow \sum_k c_k|k\rangle|k\rangle, \tag{6}$$

которое определяет понятие полностью перепутывающего измерения и отличается от (4) качественно иным способом отображения измеренной информации. Последняя теперь отображается перепутанностью между объектом и прибором, описываемой совместным когерентным состоянием $\Psi = \sum c_k|k\rangle|k\rangle$. Оно уже не является собственным для измеряемой переменной $\hat{A}_0 = \sum \lambda_k|k\rangle\langle k| \otimes \hat{I}$ и индикаторной переменной прибора $\hat{A}_M = \sum \lambda_k \hat{I} \otimes |k\rangle\langle k|$, но, несмотря на это, обеспечивает их строгое равенство, т.е.

$$(\hat{A}_M - \hat{A}_0)\Psi = 0.$$

В отличие от традиционных перепутывающих преобразований, рассматриваемых в теории квантовых вычислений, оно не просто создает перепутанность в двухчастичной системе, но содержит на выходе точное отображение избранной входной переменной $\hat{A}_0$, что автоматически приводит к его необратимости. При этом необратимость проявляется в полной потере информации о начальном состоянии прибора.

Описанное отображением (6) существенно квантовое изометрическое (при фиксированном ψ_M) преобразование $\psi_A \otimes \psi_M \longrightarrow \sum \langle k|\psi_A\rangle_A |k\rangle_A |k\rangle_M$ независимого чистого состояния в перепутанное также можно понимать как измерение переменной $\hat{A} = \sum \lambda_k |k\rangle_A \langle k|_A$ с помощью индикаторной переменной $\hat{M} = \sum \lambda_k |k\rangle_M \langle k|_M$. Соответствующее обобщение супероператора (5), приводящее к возникновению именно таких состояний, имеет вид

$$\mathcal{M}_0 = \sum_{kl} (\hat{P}^M_{kl} \mathrm{Tr}_M \odot) \otimes (\hat{P}^A_{kk} \odot \hat{P}^A_{ll}), \quad (7)$$

где $\hat{P}_{kl} = |k\rangle\langle l|$ – одномерные проекторы из $|l\rangle$ в $|k\rangle$ соответствующих гильбертовых пространствах H_A, H_M. Данное преобразование обеспечивает для чистого состояния $\hat{\rho}^A = |\psi_A\rangle\langle\psi_A|$ чистое перепутанное состояние составной системы. Отметим, однако, что это не означает отсутствие частичного деквантования начального состояния, поскольку оно представляется в конечном состоянии только диагональными ортопроекторами $\hat{P}_{ii}$, $\hat{P}_{jj}$. Данное деквантование есть неизбежное следствие измерения при представлении его результатов в форме перепутанности.

Описанные выше два крайних выражения для супероператоров измерения – стандартное $\mathcal{M}_{AM}$ и полностью перепутывающее $\mathcal{M}_0$ – могут быть обобщены на единое представление вида

$$\mathcal{M} = \sum_{kl} R_{kl} (\hat{P}^M_{kl} \mathrm{Tr}_M \odot) \otimes (\hat{P}^A_{kk} \odot \hat{P}^A_{ll}), \quad (8)$$

описывающее перепутывающее измерение с эрмитовой матрицей перепутывания R_{kl}, обеспечивающей его вполне положительность и сохранение нормировки. При $R_{kl} = \delta_{kl}$ получаем стандартное квантовое измерение (5), если отождествить наборы проекторов с соответствующими индексами k и λ. Проекторы $\hat{P}^A_{kk}$, $\hat{P}^A_{ll}$ здесь характеризуют информацию, отбираемую для измерения, а ее статистические свойства заданы матрицей плотности $\hat{\rho}^A$. Статистические свойства выходной информации, представленной проекторами $\hat{P}^M_{kl}$, определяются только матрицей плотности $\hat{\rho}^A$ и заданы в инвариантном виде относительно выбора базиса в пространстве H_M состояний индикаторной системы.

Преобразование (8) порождает в результате измерения перепутанность, промежуточную между максимальной при $R_{kl} \equiv 1$ и ее полным отсутствием при $R_{kl} = \delta_{kl}$. Структура данного преобразования и порождаемых им состояний позволяют характеризовать создаваемую квантовую перепутанность как результат точного измерения одной квантовой системы с помощью другой, которое в его супероператорном представлении автоматически учитывает ограничения, накладываемые соотношением неопределенностей.

Рассматривая базисный набор матриц плотности в форме $\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^M$, для преобразованной совместной матрицы плотности получаем

$$\hat{\rho}^{AM} = \mathcal{M}\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^M = \sum R_{kl} \rho^A_{kl} \hat{P}^A_{kl} \otimes \hat{P}^M_{kl}. \quad (9)$$

В случае начальной матрицы плотности составной системы общего вида $\hat{\rho}^{AB}$ результирующая матрица имеет тот же самый вид (9) с учетом того, что матричные элементы ρ^A_{kl} соответствуют парциальной матрице плотности $\hat{\rho}^A = \mathrm{Tr}_B \hat{\rho}^{AB}$. Таким образом, матрица плотности составной системы в процессе измерения возникает как результат дублирования состояний начальной матрицы плотности объекта и сопровождается домножением ее матричных элементов на матрицу перепутывания. Наглядной иллюстрацией механизма перепутывающего измерения является эффект Штерна–Герлаха, рассматриваемый в следующем разделе[1].

5. ЭКСПЕРИМЕНТ ШТЕРНА–ГЕРЛАХА КАК МОДЕЛЬ ПЕРЕПУТЫВАЮЩЕГО ИЗМЕРЕНИЯ

Схема эксперимента и пояснение математической структуры квантовых состояний даны на рисунке. Роль объекта в этом эксперименте [20] играет спиновая подсистема атома, а прибора – пара пространственных компонент пучка. Структура полного пространства состояний может быть представлена в виде $H = H_s \otimes H_2 \otimes H_R$. Здесь H_s – пространство спиновых состояний, а $H_t = H_2 \otimes H_R$ описывает отображение в форме прямого произведения разбиения полного гильбертова пространства трансляционного движения на прямую сумму $H_t = H_+ \oplus H_-$, соответствующую (в частности) симметрично определенной двузначной переменной $\hat{m} = \hat{P}_+ - \hat{P}_-$, где $\hat{P}_\pm$ – проекторы на подпространства $H_\pm$. При этом H_2 описывает двумерное пространство $H_2 = |-1\rangle \oplus |+1\rangle$, отвечающее собственным значениям $m = \pm 1$ переменной $\hat{m}$, а $H_R = H_+$ описывает $\psi_0(\mathbf{r})$ только при $z > 0$. Отобра-

[1] Идея использования этого примера для иллюстрации перепутывающего измерения принадлежит Ф.Я. Халили.

жение $\psi_0(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi(m, \mathbf{r}_+)$, где $z_+ = z > 0$, дается выражением

$$\begin{aligned} \psi(m, \mathbf{r}_+) &= \sum_{m = \pm 1} \hat{\Pi}_m \psi_0(\mathbf{r}), \\ \hat{\Pi}_m &= U_m(\delta_{m,+1}\hat{P}_+ + \delta_{m,-1}\hat{P}_-), \end{aligned} \tag{10}$$

где $U_{\pm 1}$ – два произвольных унитарных преобразований $H_+ \longrightarrow H_+$ и $H_- \longrightarrow H_+$. Последние в операционном смысле соответствуют физическим преобразованиям, которые могут выполняться совместно над компонентами расщепленного пучка, приводя в конечном счете к их перекрытию.

Выбирая направление градиента магнитного поля поперек направления среднего импульса, чтобы сила действовала ортогонально направлению X среднего движения, получаем для оператора силы выражение $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mu} H'(z)\mathbf{e}_z$, направление которой зависит от знака проекции спина на ось Z. Сила направлена вдоль проекции спина по оси Z – вдоль градиента поля независимо от других компонент спина. Для описания эффекта квантовая динамика существенна лишь по одной координате z, в то время как делокализация в направлении Y вообще несущественна, а роль движения по оси X проявляется главным образом лишь во временнóй модуляции $\theta(t)$ действующего на спин локального поля

$$\mathbf{H}(z, t) \approx \mathbf{H}'_0 z \theta(t). \tag{11}$$

Соответственно гамильтониан может быть представлен в виде

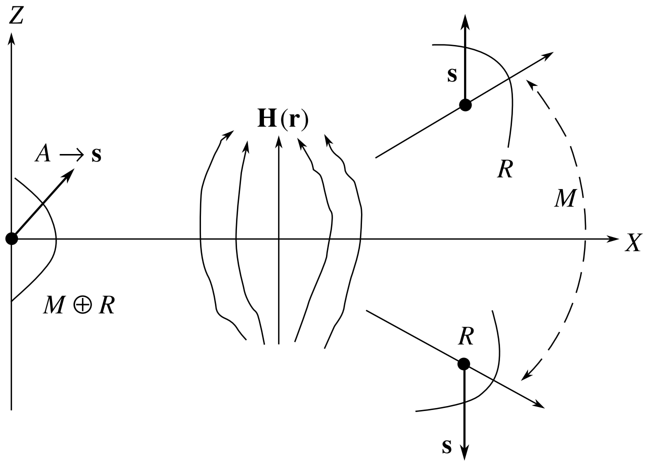
$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}^2/2m - H'_0 \hat{z} \hat{\mu} \theta(t), \tag{12}$$

где $\hat{\mu}$ описывает проекцию спинового момента на направление градиента поля $\mathbf{H}'_0$.

Данное сокращенное описание вполне достаточно для того, чтобы количественно промоделировать наиболее важные детали информационного обмена, раскрывающие в дополнение к анализу [21] открытый характер рассматриваемой динамической системы.

Гамильтониан (12) позволяет получить простое решение динамической задачи. С использованием представления взаимодействия с невозмущенным гамильтонианом в виде оператора потенциальной энергии для оператора временнóй эволюции для времени после окончания импульса взаимодействия с полем получаем

$$U(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta p \hat{z} \hat{\sigma}_3\right) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{(\hat{p} + \Delta p \hat{\sigma}_3)^2}{2m} t\right]. \tag{13}$$



Общая схема эксперимента Штерна–Герлаха и соответствующая математическая структура системы объект–прибор ($A + M$). Здесь векторы $\mathbf{s}$ показывают среднее квантово-механическое значение спина, M – пространство значений индекса компоненты расщепленного пучка, R – внутренняя пространственная степень свободы расщепленного пучка, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ – напряженность магнитного поля.

Первый сомножитель в правой части этого равенства описывает сдвиг импульса на величину $\Delta p \hat{\sigma}_3 = \pm \Delta p$, где

$$\Delta p = H'_0 \mu \tau_p, \quad \tau_p = \int_0^\infty \theta(\tau) d\tau.$$

Второй сомножитель описывает свободное движение со сдвинутым на величину $\pm\Delta p$ импульсом.

Применяя унитарное преобразование (13) к начальной координатно-спиновой волновой функции $\Psi(z, 0) = \sum c_\sigma |\sigma\rangle \otimes \psi_0(z)$, получаем в пренебрежении квантовым расплыванием начального волнового пакета (которое может быть существенным для когерентных свойств редуцированного состояния)

$$\begin{gathered} \Psi(z, t) = \sum_{\sigma = \pm 1} c_\sigma |\sigma\rangle e^{i\sigma\Delta k z} \psi_0(z + \sigma \Delta v t), \\ -\infty < z < +\infty, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\Delta k = \Delta p/\hbar$, $\Delta v = \Delta p/m$. Это выражение справедливо лишь для таких значений $t \gg \tau_p$, когда компоненты $\psi_0(z \pm \Delta v t)$ полностью разрешены.

В полном пространстве состояний пары систем $H_s \otimes H_t$ состояние (14) является чистым, поскольку никаких эффектов необратимости динамики не учитывалось. Однако при переходе к редуцированному описанию в пространстве $H_s \otimes H_t$ в связи с усреднением по состояниям координаты внутри расщепленных компонент ситуация радикально меняется. Матрица плотности в редуцированном пространстве $H_s \otimes H_2$ имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} R_{\sigma\sigma'} c_\sigma c_{\sigma'}^* |\sigma\rangle|\sigma\rangle\langle\sigma'|\langle\sigma'|. \qquad (15)$$

Здесь вторая пара векторов $|\sigma\rangle$ ($\sigma \longrightarrow m$) описывает состояния редуцированной пространственной компоненты в H_2, а $R_{mm'}$ – соответствующая матрица перепутанности

$$R_{mm'} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Pi}_m \sum_\sigma e^{i\Delta k\sigma z}\psi_0(z + \sigma\Delta vt) \times$$
$$\times \left[\hat{\Pi}_{m'} \sum_{\sigma'} e^{i\Delta k\sigma' z}\psi_0(z + \sigma'\Delta vt)\right]^+ dz.$$

Подставляя сюда выражение (10) для операторов $\hat{\Pi}_m$, для матрицы перепутанности окончательно получаем

$$R_{11} = R_{-1,-1} = 1, \quad R_{1,-1} = R_{-1,1}^* = (\psi_{-1}, \psi_{+1}), \qquad (16)$$

где $\psi_m = U_m[e^{i\Delta kmz}\psi_0(z + \Delta vt)]$.

Таким образом, параметр перепутанности $q = R_{1,-1}$ определяется перекрытием совмещенных компонент пучка. В принципе возможно полное перекрытие, $q = 1$, для которого матрица плотности (15) соответствует чистому состоянию $\Psi = \sum c_\sigma|\sigma\rangle|\sigma\rangle$. Однако при ограничении только локальными преобразованиями перекрытие отсутствует, $q = 0$, и в соответствии с [22, 23] отсутствует и перепутанность в системе спин-компоненты пучка. Наличие точной информации о принадлежности к определенной компоненте (“which path”) в данном случае несовместимо с перепутанностью, и преобразование измерения соответствует стандартному измерению (5).

Отметим, что соответствие матрицы плотности (15) перепутывающему измерению (8) при фиксированных параметрах эксперимента имеет ограниченный характер, в частности, из-за ограниченного при конечных t расщепления пучка, которое может оказаться недостаточным для начального пучка очень больших размеров. Только переход к предельному значению $t \longrightarrow \infty$ выражает принципиальную реализуемость идеализированного преобразования. Такая ситуация типична для теории измерений, причем, очевидно, не только квантовых.

6. СТРУКТУРА СУПЕРОПЕРАТОРОВ КВАНТОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Сначала определим ограничения, накладываемые условиями нормировании и положительности. Из выражения (9) имеем $\mathrm{Tr}\hat{\rho}^{AM} = \sum R_{kk}\rho_{kk}^A$. С учетом произвольности $\hat{\rho}^A$ отсюда получаем условие нормировки в виде $R_{kk} \equiv 1$. Условия положительности и одновременно вполне положительности приводят к положительности матрицы $\hat{\rho}_e^A = (R_{kl}\rho_{kl}^A)$ для произвольной положительной матрицы $\hat{\rho}^A = (\rho_{kl}^A)$. Пользуясь спектральным представлением обеих этих матриц, без труда обнаруживаем, что необходимым и достаточным условием этого является положительность матрицы перепутывания $\hat{R} = (R_{kl})$.

Повторное перепутывающее измерение с учетом вида его супероператора (8), равенства $R_{kk} \equiv 1$ и обращения в нуль недиагональных элементов матрицы плотности индикатора после усреднения $\mathrm{Tr}_M\odot$ приводит к соотношению

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_{AM}. \qquad (17)$$

Таким образом, повторное перепутывающее измерение приводит к потере перепутанности и эквивалентности результирующего преобразования стандартному измерению. Причиной этого является то обстоятельство, что ненулевая перепутанность при первом измерении связана именно с разрушением перепутанности начального состояния индикатора с объектом, что позволяет беспрепятственно переводить состояния индикатора, не сфазированные с состояниями объекта, в перепутанные. Повторное измерение, наоборот, уничтожает перепутанность из-за усреднения матрицы плотности индикатора, поскольку перепутанность принципиально существует только при совместном рассмотрении двухсоставных систем.

В качестве примера рассмотрим двухуровневую систему с $\dim H_A = 2$. В этом случае критерий положительности дает общий вид матрицы перепутывания

$$R = \begin{pmatrix} 1 & q \\ q^* & 1 \end{pmatrix}, \quad |q|^2 \le 1. \qquad (18)$$

Уравнение на собственные значения для супероператора измерения

$$\mathcal{M}\hat{\rho}^{AM} = \lambda\hat{\rho}^{AM} \qquad (19)$$

поддается аналитическому решению. Оно имеет вид

$$\sum_{kl}\sum_m R_{kl}\rho_{klmm}^{AM}\hat{P}_{kl}^A \otimes \hat{P}_{kl}^M =$$
$$= \lambda\sum_{kl}\sum_{mn}\rho_{klmn}^{AM}\hat{P}_{kl}^A \otimes \hat{P}_{mn}^M \longrightarrow R_{kl}\left(\sum_\mu \rho_{kl\mu\mu}^{AM}\right)\delta_{km}\delta_{ln} =$$
$$= \lambda\rho_{klmn}^{AM}.$$

При $D = 2$ размерность проблемы определяется 16 возможными значениями четырехмерного индекса "матрицы плотности" $klmn$ (помимо физически содержательных матриц плотности в задаче на собственные значения рассматриваются произвольные операторы). С учетом отсутствия в представленной слева преобразованной матрице плотности недиагональных по измерительной системе элементов совместной матрицы плотности ρ_{klmn}^{AM} получаем, что восемь правых собственных нуль-векторов $\hat{e}_{AM}^{0k}$, $k = 1, \ldots, 8$, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$, описываются операторами вида

$$\hat{e}_{AM}^{0k} = \begin{cases} \hat{\rho}_A^{0k} \otimes \hat{P}_{12}^M, & k = 1, 2, 3, 4, \\ \hat{\rho}_A^{0k} \otimes \hat{P}_{21}^M, & k = 5, 6, 7, 8, \end{cases} \tag{20}$$

которые имеют нулевые диагональные по M матричные элементы ρ_{klmn}^{AM}. Здесь матрицы плотности $\hat{\rho}_A^{0k}$ произвольны. Свобода в их выборе обязана восьмикратному вырождению и связана с произвольностью выбора четверок линейно независимых базисных векторов (20), соответствующих базисным операторам $\hat{P}_{12}^M$, $\hat{P}_{21}^M$ измерительной системы M.

Еще четыре нулевых собственных вектора отвечают соотношению $\hat{\rho}_{kl11}^{AM} = -\hat{\rho}_{kl22}^{AM}$ и имеют вид

$$\hat{e}_{AM}^{0k} = \hat{\rho}_A^{0k} \otimes (\hat{P}_{22}^M - \hat{P}_{11}^M), \quad k = 9, 10, 11, 12 \tag{21}$$

с произвольными линейно независимыми матрицами плотности $\hat{\rho}_A^{0k}$.

И наконец, двум ненулевым собственным векторам с $\lambda = 1$ соответствует пара линейной независимых функций $\rho_k = \delta_{k1}, \delta_{k2}$ в выражениях вида $\rho_{klmn}^{1,k} = \rho_k \delta_{kl} \delta_{km} \delta_{ln}$ и отвечающие им операторы

$$\hat{e}_{AM}^{1k} = \begin{cases} \hat{P}_{11}^A \otimes \hat{P}_{11}^M, \\ \hat{P}_{22}^A \otimes \hat{P}_{22}^M, \end{cases} \quad k = 13, 14. \tag{22}$$

Два этих оператора определяют базис выпуклого множества $p\hat{e}_{AM}^{1,13} + (1-p)\hat{e}_{AM}^{1,14}$, $0 \le p \le 1$ матриц плотности, не изменяемых в процессе измерения.

Последние два линейной независимых оператора $\hat{e}_{AM}^{015} = \hat{P}_{12}^A \otimes \hat{I}^M$ и $\hat{e}_{AM}^{016} = \hat{P}_{21}^A \otimes \hat{I}^M$ являются собственными с нулевым собственным значением, лишь если измерение является неперепутывающим (стандартным), т.е. $R_{kl} = \delta_{kl}$. В общем случае они отсутствуют, поскольку в общем случае супероператор перепутывающего измерения не представляется матрицей простой структуры, так же, например, как и одномодовый фермионный оператор уничтожения

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеющий лишь один нулевой собственный вектор $e_0 = (1, 0)$. Соответствующее линейное пространство $c_{15}\hat{e}_{AM}^{015} + c_{16}\hat{e}_{AM}^{016}$ не содержит физически значимых матрицы плотности.

Описанная особенность супероператора перепутывающего измерения делает возможным выполнение соотношения (17), поскольку в ее отсутствие из (17) вытекало бы его представление в форме положительно определенного квадратного корня супероператора стандартного измерения, не зависящего от матрицы перепутывания R_{kl}, характеризующей супероператор перепутывающего измерения. При $R_{kl} = \delta_{kl}$ эта особенность отсутствует и соответственно данное корневое представление справедливо.

Матрица перепутывающего измерения в описанном "собственном" базисе имеет вид

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \underline{\hat{0}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \underline{\hat{0}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{0}| & \hat{0}| & \hat{O} & \hat{0}| & \hat{0}| & \hat{0}| & \hat{0}| \\ 0 & 0 & \underline{\hat{0}} & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\hat{0}} & 0 & 0 & 0 & q^* \\ 0 & 0 & \underline{\hat{0}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\hat{0}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подматрица $\hat{O}$ имеет размерность 10×10, а $\underline{\hat{0}}$ и $\hat{0}|$ – 10-компонентные бра- и кет-векторы соответственно. Четвертая и пятая строки соответствуют поперечно-поперечным базисным операторам $\hat{P}_{12} \otimes \hat{P}_{12}$, $\hat{P}_{21} \otimes \hat{P}_{21}$, а две последние – двум несобственным операторам $\hat{P}_{12} \otimes \hat{I}/D$, $\hat{P}_{21} \otimes \hat{I}/D$.

7. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕПУТАННОСТИ

В соответствии с разд. 4 супероператор перепутывающего измерения создает перепутанность, не зависящую от начального состояния прибора и определяемую лишь матрицей перепутывания и начальным состоянием измеряемого объекта по отношению к собственному базису измеряемой переменной (или набору коммутирующих переменных). В общем случае могут представлять интерес два типа измерительной перепутанности, представляемой соответствующей величиной когерентной информации (“сохраненной перепутанности” [24, 25]): одномоментная – описывающая связь одновременных состояний систем A, M, и двухмоментная – описывающая связь начального состояния системы A иконечного состояния системы M [26].

В первом случае для одномоментного канала $A \rightleftarrows M$ имеем $E = S[\hat{\rho}^M] - S[\hat{\rho}^{AM}]$, где $\hat{\rho}^{AM}$ описывается выражением (9). Выражая энтропию через матричные элементы $R_{kl}\rho_{kl}$, с учетом $R_{kk} \equiv 1$ получаем

$$E = S[(\rho_{kk})] - S[(R_{kl}\rho_{kl})], \tag{23}$$

где энтропии S вычисляются соответственно для диагонализированной и произвольной матрицы плотности.

Величина измерительной перепутанности, определяемая выражением (23), в отличие от значений когерентной информации для произвольных каналов, всегда положительна. Она обращается в нуль для диагональных начальных матриц плотности, что имеет простой качественный смысл. В этом случае когерентность между измеряемыми состояниями в исходном состоянии отсутствует, а именно она переносится на индикаторную систему.

В случае чистого состояния с максимальной неопределенностью измеряемой переменной, $\rho_{kl} \equiv 1/D$, измерительная перепутанность имеет вид

$$E = \log_2 D + \sum r_k \log_2 r_k,$$

где $0 \le r_k \le 1$ – собственные значения нормированной матрицы перепутанности R_{kl}/D. Для максимальной когерентности, т.е. при $R_{kl} \equiv 1$, получаем максимально возможное значение измерительной перепутанности $E = \log_2 D$.

Супероператор двухмоментного канала $A \longrightarrow M$ имеет в соответствии с [26] вид

$$\mathcal{N} = \mathrm{Tr}_A \mathcal{M}(\odot \otimes \hat{\rho}^M), \tag{24}$$

где символ подстановки описывает зависимость от начального состояния объекта $\hat{\rho}^A$. С учетом структуры измерительного супероператора (8) супероператор (24) в действительности не зависит от начального состояния индикатора $\hat{\rho}^M$.

С учетом вида преобразования $\mathcal{M}$ сразу же получаем, что усреднение по начальному состоянию приводит к диагонализации выходной матрицы плотности $\rho_{kk}^M = \rho_{kk}^A$ и ее зависимости только от диагональной части начальной матрицы плотности объекта. Такое преобразование для когерентной информации $S[\hat{\rho}^M] - S[(\mathcal{N} \otimes \mathcal{I})\Psi_{AR}\Psi_{AR}^+]$, где Ψ_{AR} задает начальное состояние входа и опорной системы R, соответствующее матрице плотности входа $\hat{\rho}^A$, всегда дает нулевое значение вследствие диагональности обеих фигурирующих здесь матриц плотности и равенства их диагональных элементов.

Таким образом, перепутанность при измерении имеется только для одномоментных состояний, а двухмоментная перепутанность отсутствует вследствие разрушения начальной когерентности. Это связано с коллапсом начального квантового состояния объекта, который при перепутывающем измерении происходит точно по той же причине – в результате выделения ортогонального набора измеряемых состояний – как и в случае стандартного квантового измерения. Эффект перепутанности вообще не имеет никакого значения при рассмотрении состояния объекта безотносительно к измерительному прибору. В силу этой же причины перепутывающее измерение не может быть использовано для переноса перепутанности с одной пары квантовых объектов на другую, поскольку вновь созданная перепутанность в двух парах объект–прибор существует только в полной совокупности этих объектов и отсутствует в рассматриваемой независимо паре прибор–прибор. Тем не менее при наличии возможности совместного использования всех указанных систем рассмотрение такого типа процессов размножения перепутанности, сопровождающихся установлением единых значений измеряемой переменной, может представлять интерес.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, перепутывающее измерение является реализацией идеи квантового невозмущающего измерения, объединяющей как квазиклассический, так и чисто квантовый варианты представления измеренной информации. Характерной особенностью соответствующего преобразования матрицы плотности является положительная определенность отвечающей ей когерентной информации, являющейся при измерении адекватной количественной характеристикой перепутанности, созданной в системе объект–прибор.

Есть все основания ожидать, что создание перепутанности в системе двух или более объектов, причем таким образом, что преобразованные системы копируют информацию о выбранной переменной без ее искажения, должно найти адекватное применение в задачах практического использования потенциальных ресурсов квантовой информации.

В заключение надо отметить, что настоящая статья представляет изложение результатов, доложенных авторами на III мемориальном семинаре памяти Д.Н. Клышко. В связи с этим трудно оставить без упоминания тот факт, что в 1997 г. у одного из соавторов имела место содержательная дискуссия с Д.Н. Клышко на тему физической сути понятия квантового измерения. Как память об этой дискуссии сохраняется нами авторская правка стать [27], в которой обсуждается операционное содержание коллапса волновой функции. Мы надеемся, что содержание данного сообщения могло бы представлять интерес как своеобразное продолжение упомянутой дискуссии, и пользуемся возможностью принести эту скромную дань светлой памяти Давида Николаевича.

Данная работа поддержана грантами РФФИ № 01-02-16311, 02-03-32300 и INTAS (INFO 00-479).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Von Neumann J.* Mathematical Foundation of Quantum Mechanics. Prienceton: Princeton University Press, 1955. 368 p.
2. *Sudbery A.* Quantum Mechanics and the Particles of Nature. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 19486. 421 p.
3. *Менский М.Б.* // УФН. 2000. Т. 170. № 5. С. 631.
4. The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation / Ed. by Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A. N.Y.: Springer-Verlag, 2000. 376 p.
5. *Childs A.M., Deotto E., Farhi E., Goldstone J., Gutmann S., Landahl A.J.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. № 3. P. 032314.
6. *Kuzmich A., Mandel L., Bigelow N.P.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. № 8. P. 1594.
7. Duan L.–M., Cirac J.I., Zoller P., Polzik E.S. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. № 26. P. 5643.
8. *Julsgaard B., Kozhekin A., Polzik E.* // Nature. 2001. V. 413. P. 400.
9. *DiLisi A., Mölmer K.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. № 5. P. 052303.
10. *Jakob M., Abranyos Y., Bergou J.A.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. № 2. P. 022113.
11. *Gisin N.* // J. Mod. Opt. 2001. V. 48. P. 1397.
12. *Lerge M., Wegmuller M., Gisin N.* // E-prinr, LANL, quant-ph/0207055.
13. *Barenco A., Deutsch D., Ekert A., Jozsa R.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4083.
14. *Брагинский В.Б., Воронцов Ю.И., Халили Ф.Я.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 73. № 6. С. 1340.
15. *Kraus K.* States, Effects and Operations. Berlin: Springer Verlag, 1983. 453 p.
16. *Гришанин Б.А.* Квантовые случайные процессы. http://comsiml.phys.msu.sy/publicatiohns/papers/bag-book.ps.gz.
17. *Ludwig G.* // Foundations of Quantum Mechanics and Ordered Linear Spaces. Lecture Notes in Phys. 1974. V. 29. P. 122.
18. *Stenholm S.* // J. Mod. Opt. 2000. V. 47. № 2/3. P. 311.
19. *Grishnin B.A., Zadkov V.N.* // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 022309.
20. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1983. 650 с.
21. *Cerf N.J., Adami C.* // E-print, LANL, quant-ph/9605002.
22. *Bennett C.H. et al.* // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. № 5. P. 3824.
23. *Баргатин И.В., Гришанин Б.А., Задков В.Н.* // УФН. 2001. Т. 171. № 6. С. 625.
24. *Barnum H., Caves C.M., Fuchs C.A., Jozsa R., Schumacher B.* // J. Phys. A. 2001. V. 34. № 35. P. 6767.
25. *Grishanin B.A., Zadkov V.N.* // Proc. SPIE. 2001. V. 4750. P. 54.
26. *Grishanin B.A., Zadkov V.N.* // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. № 3. P. 032303.
27. *Klyshko D.N.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 243. № 4. P. 179.